Tentamen Gewone differentiaal vergelijkingen

16/4/2010 dubbelvel 1/12

Opgave 1

10

Stel $P = 7x^2y + 18xy + 16x^3y^4$

$Q = 5x^3 + 15x^2 + 16x^4y^3$

dan willen we een impliciete oplossing vinden v.d. diff. vgl.

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

daartoe vermenigvuldigen we de diff. vgl met een integratiefactor $\varphi(x \cdot y)$, zodat hij exact wordt.

dan moet dus gelden:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi P) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi Q)$$

dit gebruiken we om φ te bepalen.

z.o.z.

$$\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot P + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \varphi$$

$P = 7x^2y + 18xy + 16x^3y^4$ dus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 7x^2 + 18x + 64x^3y^3$$

$$Q = 5x^3 + 15x^2 + 16x^4y^3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 15x^2 + 30x + 64x^3y^3$$

laten we proberen : $\varphi(x \cdot y) = (x \cdot y)^n : n \in \mathbb{N}_{>0}$

dan is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = n x^n y^{n-1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = n x^{n-1} y^n$$

dit invullen geeft:

$(nx^n y^{n-1})(7x^2y + 18xy + 16x^3y^4) +$

$x^n y^n(7x^2 + 18x + 64x^3y^3) =$

$(nx^{n-1}y^n)(5x^3 + 15x^2 + 16x^4y^3) +$

$x^n y^n(15x^2 + 30x + 64x^3y^3)$

$\Rightarrow$

$7nx^{n+2}y^n + 18nx^{n+1}y^n + 16nx^{n+3}y^{n+3}$
$+ 7x^{n+2}y^n + 18x^{n+1}y^n + 64x^{n+3}y^{n+3} =$

$5nx^{n+2}y^n + 15nx^{n+1}y^n + 16nx^{n+3}y^{n+3} +$
$15x^{n+2}y^n + 30x^{n+1}y^n + 64x^{n+3}y^{n+3}$

$\Rightarrow (7n+7)x^{n+2}y^n + (18n+18)x^{n+1}y^n +$
$(16n+64)x^{n+3}y^{n+3} =$
$(5n+15)x^{n+2}y^n + (15n+30)x^{n+1}y^n +$
$(16n+64)x^{n+3}y^{n+3}$

$\Rightarrow$ dus er moet tegelijk gelden:

$7n+7 = 5n+15$
$18n+18 = 15n+30$
$16n+64 = 16n+64.$

De laatste vergelijking geldt uiteraard altijd. Nu moeten we het stelsel

$$\begin{cases} 7n+7 = 5n+15 \\ 18n+18 = 15n+30 \end{cases}$$

oplossen.

$$7n+7 = 5n+15$$

$$2n = 15-7 = 8$$

$n = 4$ dit is de enige oplossing van de eerste vergelijking, maar

$$18\cdot 4+18 = 18\cdot 5 = 90$$
$$15\cdot 4+30 = 60+30 = 90$$

dus $n=4$ lost de 2^e vergelijking ook correct op.

Onze integratiefactor wordt dus

$$\varphi(x,y) = x^4y^4$$

En de exacte diff. vorm die we moeten oplossen, wordt dus:

$$\varphi P\,dx + \varphi Q\,dy = 0$$

met

$$\varphi P = 7x^6y^5 + 10x^5y^5 + 16x^7y^8$$

$$\varphi Q = 5x^7y^4 + 15x^6y^4 + 16x^8y^7$$

vel 2/12.

<u>vervolg opgave 1</u>

de impliciete oplossing $F(x,y) = \text{const}$ die we zoeken moet voldoen aan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi P \quad \& \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \varphi Q.$$

dus:

$$F(x,y) = \psi(y) + \int \varphi P \, dx =$$

$$\psi(y) + \int (7x^6y^5 + 18x^5y^5 + 16x^7y^8)\,dx =$$

$$\psi(y) + x^7y^5 + 3x^6y^5 + 2x^8y^8$$

en bovendien moet gelden:

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi Q = \ldots 5x^7y^4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi'(y) + 5x^7y^5 + 15x^6y^4 + 16x^8y^7$$

$$= \varphi \cdot Q = 5x^7y^5 + 15x^6y^4 + 16x^8y^7$$

Dus moet gelden $\psi'(y) = 0$, dus
$\psi(y) = \text{const.} \Longrightarrow$
de impliciete oplossing
$F(x,y) = C$ is dus:

$$2x^{2}y^{8} + x^{7}y^{5} + 3x^{6}y^{5} = C$$

met C een constante.

~~Opgave 2~~

$$\cancel{\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1}}$$

$$\cancel{+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} A^{2k} = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (A^{2})^{k} +}$$

$$\cancel{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (A^{2})^{k}}$$

$$\cancel{A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ dus } A^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.}$$

dus $\exp(A) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4I)^k}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4I)^k}{(2k)!} =$

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} =$$

$$\cancel{A + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} =}$$

$$\cancel{A + A \sum_{k=0} 2^{2(k+1)}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2} A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} + I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}}$$

Opgave 2

1e truc is hier om fundamentaalmatrix $Y(t)$ te berekenen bij het stelsel.
$\vec{y}\,' = A\vec{y}$ waarbij A gegeven is.

dan is $e^{tA} = Y(t) \cdot Y(t=0)^{-1}$

en e^A is dan $e^A = Y(1) \cdot Y(t=0)^{-1}$

dus: 2.1.2.

de eig. values van A worden:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4 \; ; \; \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

en de eig. vectoren worden:

$\vec{v_1}$ bij $\lambda_1 = 2$:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{o} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{o} \Rightarrow a=b \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v_2}$ bij $\lambda_2 = -2 \Rightarrow (A-\lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{o} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{o} \Rightarrow a = -b \Rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dus de fundamentaalmatrix wordt:

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

vel 3/12.

Vervolg opgave 2

$$Y(t=0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t=0)^{-1} =$$

[redacted]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

dus

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t}) \\ \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

dus: zoz.

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

en

$$e^{A} = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^2+e^{-2}) & \frac{1}{2}(e^2-e^{-2}) \\ \frac{1}{2}(e^2-e^{-2}) & \frac{1}{2}(e^2+e^{-2}) \end{pmatrix}$$

b) de eig. values van A worden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)(3-\lambda) + 2 =$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 + 2 =$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 4) = 0$$

$\lambda = 5$ of $\lambda = 4$

de eig. vectoren worden.

$\vec{v}_1$ bij $\lambda_1 = 4$:

$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_2$ bij $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~ dus!

$$Y = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{5t} \\ -e^{4t} & -e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$Y(t=0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

nu bepalen we de inverse:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow Y(t=0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore Y(t)\, Y(t=0)^{-1} = e^{tA}$$

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{5t} \\ -e^{4t} & -e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{5t} - e^{4t} & 2(e^{5t} - e^{4t}) \\ e^{4t} - e^{5t} & 2e^{4t} - e^{5t} \end{pmatrix}.$$

$$e^{A} = \exp\left(\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2e^{5} - e^{4} & 2(e^{5} - e^{4}) \\ e^{4} - e^{5} & 2e^{4} - e^{5} \end{pmatrix}$$

$$= Y(1)\, Y(t=0)^{-1}$$

vel 4/12.

80 Opgave 3

We bepalen eerst de fundamentele matrices daarna tekenen we de plaatjes v.d. gl. stromen.

a) de eig. values van A zijn:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) + 2 =$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1) + 2 =$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 + 2 =$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 \Rightarrow \quad D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

dus:

$$\lambda = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2} = 1\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}$$

De eigenvectoren van A worden dan

$\lambda = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}$:

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{7} & 2 \\ -4 & -1 + i\sqrt{7} \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{o}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{7} & 2 \\ -4 + -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7}) & 0 \end{pmatrix}} \vec{v} = \vec{o}$$

stel : $\vec{v} = (a \;\; b)^T \Rightarrow$

$(1 + i\sqrt{7})a + 2b = 0.$ Stel $a = 1$

$\Rightarrow \quad 2b = -(1 + i\sqrt{7}).$

$b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}$

en $-4 \cdot 1 + (-1 + i\sqrt{7})(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}) =$

$$-4 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7} - \tfrac{1}{2} i^2 (\sqrt{7})^2 =$$

$$-3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot 7 = 0.$$

dus $\vec{v}^{\,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - i\sqrt{7} \end{pmatrix}$

is een eigenvector bij $\lambda = 1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}$

maar A is reeel, dus $\bar{\vec{v}}^{\,1}$ is bij $\bar{\lambda}$, dus

bij $\lambda = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}$ is

$\vec{v}^{\,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i\sqrt{7} \end{pmatrix}$ een eigenvector.

dus $\vec{y} = e^{(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i\sqrt{7} \end{pmatrix}$ is een oplossing van het stelsel.

nu bepalen we $\mathrm{Re}(\vec{y})$:

$$\vec{y} = e^{1\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 2\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \\ (-1 + i\sqrt{7})\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$= e^{1\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + 2i\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \\ -\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sqrt{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + i\left(\sqrt{7}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

Dus de fundamentaalmatrix wordt:

$$Y = \begin{pmatrix} Re(\vec{y}) & Im(\vec{y}) \end{pmatrix} =$$

$$e^{1\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 2\cos\beta t & 2\sin\beta t \\ -\cos\beta - \sqrt{7}\sin\beta t & \sqrt{7}\cos\beta t - \sin\beta t \end{pmatrix}$$

met $\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

---

i) de eigenwaarden van A zijn:

$\det(A - \lambda I) =$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 6 + (\lambda + 3)(\lambda - 2) =$$

$$6 + \lambda^2 + \lambda - 6 = \lambda^2 + \lambda =$$

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = 0$ of $\lambda = -1$

vel 5/12.

Vervolg opgave 3

b)

de eigenvectoren zijn:

$\lambda = 0$:

$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$b = 2a \Rightarrow$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij $\lambda = 0$.

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is inderdaad een oplossing van het stelsel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{0},$$

dus dit klopt inderdaad

$\lambda = -1$:

$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $b = 3a$.

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij $\lambda = -1$.

de fundamentaalmatrix wordt dan dus:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) de eig. values van A zijn:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

is enige eig. value.

de eigenvectoren zijn:

$\lambda = 2 \Rightarrow$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow a = 0 \text{ en}$$

b mag alles zijn.

dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is enige eig vector bij $\lambda = 2$

dus $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

is een oplossing van het stelsel, maar we hebben nog een tweede oplossing nodig, lin. onafh. van $\vec{x}_1$ om de fundamentaalmatrix te maken.

We gebruiken de methode van example 2.30 op pag 385 - 388 van het boek.

$\lambda = 2 \Rightarrow$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

een vector $\vec{v}$ lin. onafh. van $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

z.d.d.

$(A-\lambda I)^2\vec{v} = \vec{0}$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. $(\lambda = 2)$

Dan is

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

dus de 2e lin. onafh. oplossing van het stelsel is dan:

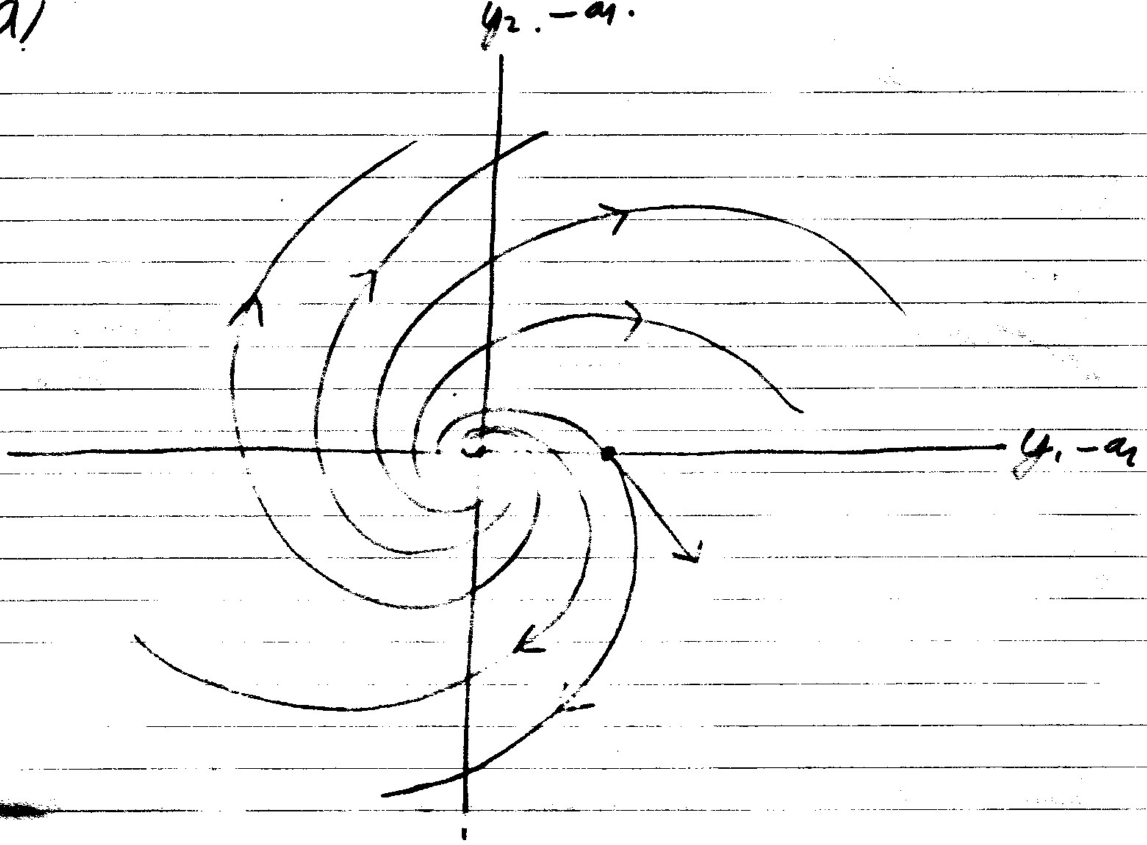
$$\vec{y}_2 = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$e^{2t}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$$

de fundamentaalmatrix is dan:

$$Y = \begin{pmatrix}0 & e^{2t}\\ e^{2t} & te^{2t}\end{pmatrix}$$

a)



want: $T = 3$ van de matrix A,

$D = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$

$T^2 - 4D = 3^2 - 4 \cdot 6 < 0$

en $T > 0$ dus oorsprong is

spiral source.

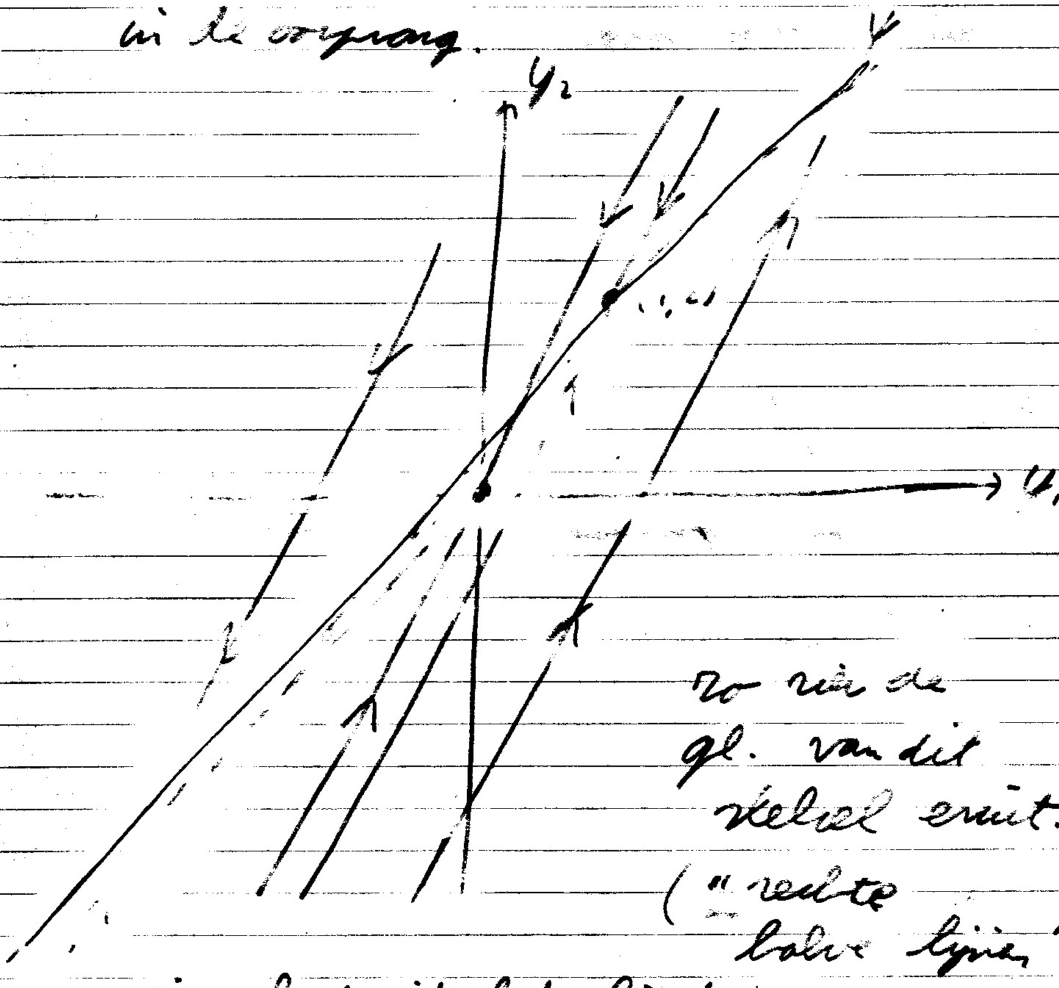
de raakvector op punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dit is genoeg info om bovenstaand plaatje te schetsen.

b) $T = -1$ & $D = 2\cdot -3 - 6 \cdot -1 =$
$-6 + 6 = 0$

nongeneric type equi-punt
in de oorsprong.



zo ziet de
gl. van dit
stelsel eruit.
("rechte
lolve lijnen").

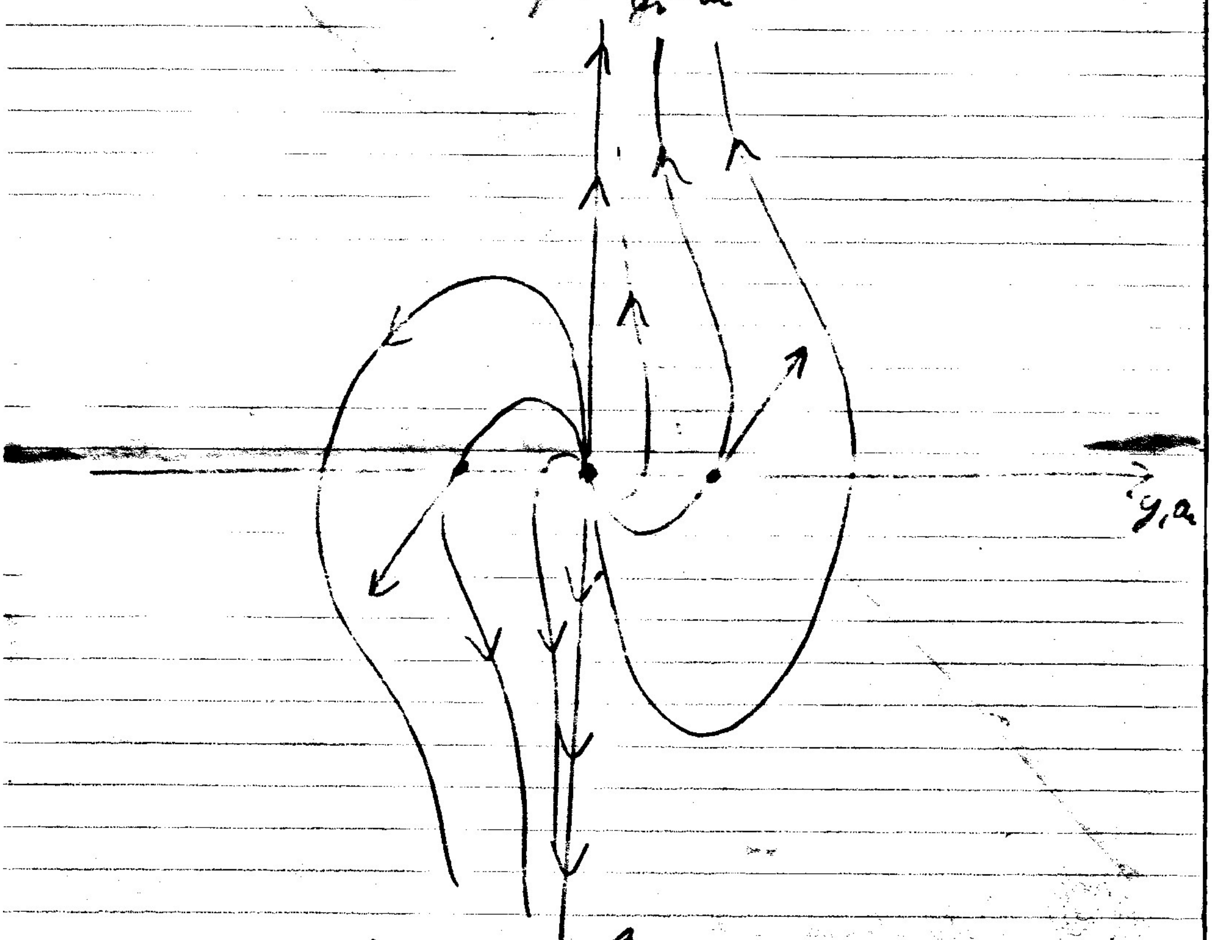
dit ~~kant uit het~~ ~~fit hut~~

dit plaatje is getekend m.b.v.
de fundamental matrix.

c) : $T = 4$ e $D = 4$

$T^2 - 4 \cdot D = 16 - 16 = 0$

nongeneric type equi-punt in de oorsprong.



raakvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is: en ~~ti~~ dit geeft genoeg info, de gl.
is $(-1,0)^T$,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. willen wel spiraliseren maar mogen de y_2-as niet snijden,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. dat is nl. een gl. v.d. ikelen.

vel 7/12

Opgave 4 (1)

hier geldt telkens dat de algemene gl.
$y = y_h + y_p$ waarbij y_h de algemene gl. v.d. bijbehorende homogene vergelijking is en y_p een particuliere oplossing v.d. d-?e verg. ...

we zullen telkens eerst y_h bepalen, dan y_p en ten slotte het antw. geven!

a) ~~Eerst oplossen~~ x_h. bepalen.

proberen $x = e^{\lambda t}$ => invullen geeft: (homogene verg.)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 6\lambda e^{\lambda t} + 9 e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C} ; \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

$\Rightarrow x = e^{+3t}$ is een oplossing.

We testen of $x = te^{3t}$ ook een opl. is:

$x' = (3t+1)e^{3t}$

$x'' = 3\cdot e^{3t} + 3(3t+1)e^{3t} =$

$(9t+6)e^{3t}$

$\Rightarrow (9t+6)e^{3t} - 6(3t+1)e^{3t}$

$+ 9te^{3t} = 0 \Rightarrow$

$9t + 6 - 6(3t+1) + 9t = 0.$

$\Rightarrow 9t + 6 - 18t - 6 + 9t = 0.$

$18t - 18t + 6 - 6 = 0$

is dit klopt.

dus $x = te^{3t}$ is ook een opl. v.d.

d.v. verg.

Dus: $x_h = Ae^{3t} + Bte^{3t}$ A, B willekeurige const.

is de alg. opl. v.d. homogene verg.

We proberen nu een opl.

x_p te raden:

proberen $x_p = a\cos y + b\sin y \Rightarrow$

$x_p' = -a\sin y + b\cos y$

$x_p'' = -a\cos y - b\sin y$.

invullen geeft:

$(-a\cos y - b\sin y) - 6(-a\sin y + b\cos y)$
$+ 9(a\cos y + b\sin y) = \sin y$.

$\Rightarrow$

$\cos y(-a - 6b + 9a) +$
$\sin y(-b + 6a + 9b - 1) = 0$

dit kan alleen gelden $\forall y \in \mathbb{R}$ als

$$\begin{cases} -a - 6b + 9a = 0 \\ -b + 6a + 9b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 8a - 6b &= 0 \\ 8b + 6a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow x = e^{+3t}$ is een oplossing.

We testen of $x = t e^{3t}$ ook een opl. is:

$x' = (3t+1)e^{3t}$

$x'' = 3 \cdot e^{3t} + 3(3t+1)e^{3t} =$

$(9t+6)e^{3t}$

$\Rightarrow (9t+6)e^{3t} - 6(3t+1)e^{3t}$

$+ 9t e^{3t} = 0 \Rightarrow$

$9t + 6 - 6(3t+1) + 9t = 0.$

$\Rightarrow 9t + 6 - 18t - 6 + 9t = 0.$

$18t - 18t + 6 - 6 = 0$

en dit klopt.

dus $x = te^{3t}$ is ook een opl. v.d.

d.v. verg.

Dus: $x_h = Ae^{3t} + Bte^{3t}$ A,B willekeurige const.

is de alg. opl. v.d. homogene verg.

We proberen nu een opl.

x_p te raden:

en $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8^2+6^2}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$ [illegible]

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{64+36} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{100}$$

dus $x_p = \frac{6}{100}\cos t + \frac{8}{100}\sin t$. is een particuliere oplossing.

~~en deze oplossing is lin. onafh. van x_1, x_2~~

dus

$$x(t) = Ae^{3t} + Bte^{3t} + \frac{6}{100}\cos t + \frac{8}{100}\sin t$$

is de alg. opl. v.d. diff verg.

$A, B \in \mathbb{R}$ 2 vrij te kiezen const.

vel 8/12.

Opgave 4, vervolg

b) y_h bepalen;

proberen $y = e^{\lambda x}$ $\Rightarrow$ invullen geeft (in kanonieke vorm):

$$3\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0 \;\forall\; \lambda \in \mathbb{C};\; x \in \mathbb{R}$, dus:

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

dus $$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} \pm \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow \lambda = \tfrac{1}{3} \text{ of } \lambda = 1$$

dus $y_h = A e^{x/3} + B e^{x}$; $A, B \in \mathbb{R}$

2 willekeurige const.

Nu zullen we y_p proberen te raden.
Stel $y_p = a \cdot e^{2x}$; wat is a dan zdd.
y_p een opl. is v.d. vgl ? =).

$y_p' = 2a e^{2x}$

$y_p'' = 4a e^{2x}$

$$=) \quad 3 \cdot 4ae^{2x} + -4 \cdot 2ae^{2x} + ae^{2x}$$

$$= 3e^{2x}$$

; $e^{2x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ =).

$$12a - 8a + a = 3$$

$$5a = 3$$

$$a = \frac{3}{5}$$

[redacted] is een opl. v.d. diff. vgl.

De alg. opl. v.d. diff. vgl is:

$$y_{alg} = Ae^{x/3} + Be^{x} + \frac{3}{5}e^{2x}$$

$A, B \in \mathbb{R}$ 2 willekeurige const.

c) ook hier geldt $u = u_p + u_h$, want
deze regel geldt voor ~~[illegible]~~ elke lineaire
1e orde inhomogene diff. vgl, dus ook
voor het stelsel dat met deze vgl.
correspondeert, dus geldt de regel
ook voor deze 3e orde diff. vgl.
(§ 9.9 geeft dit bewijs in het boek)

~~[illegible]~~ we bepalen u_h eerst.

probeer: $u = e^{\lambda s} \Rightarrow$ invullen in de homogene vgl. geeft:

$$\lambda^3 e^{\lambda s} + 3\lambda^2 e^{\lambda s} + 2\lambda e^{\lambda s} - 6e^{\lambda s} = 0$$

$$e^{\lambda s} \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0.$$

triviaal is in te zien dat $\lambda = 1$ een gl. is v.d. vgl:

$$1^3 + 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 6 = 1 + 3 + 2 - 6 = 0.$$

dus kunnen we de vgl. ~~[illegible]~~ schrijven als:

$$(\lambda-1)(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \text{ voor } a, b \in \mathbb{R}.$$

we moeten deze a & b nu vinden.

welnu:

$$(\lambda-1)(\lambda^2+a\lambda+b)=$$

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda-\lambda^2-a\lambda-b=$$

$$\lambda^3+(a-1)\lambda^2+(b-a)\lambda-b=0.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-1=3 \\ b-a=2 \\ -b=-6 \end{array}\right\}$$ dit moet gelden z.d.d. de verg. equivalent zijn.

$\Rightarrow$ $b=5$ & $a=4$ lost dit stelsel op.

dus: $(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+6)=0.$

$\Rightarrow$ $\lambda^2+4\lambda+6=0.$

$$D=4^2-4\cdot1\cdot6=$$
$$16-24=-8$$

dus
$$\lambda=\frac{-4\pm i\sqrt{8}}{2}=$$
$$-2\pm i\sqrt{2}$$

dus we hebben 3 lin. onafh. opl.

$u_1=e^s$

$u_2=e^{(-2+i\sqrt{2})s}$

$u_3=e^{(-2-i\sqrt{2})s}$.

vel 9/12

Vervolg opgave 4

reële lin. onafh. opl. zijn dus:

$u_1 = e^s$

$u_2 = \mathrm{Re}\left(e^{(-2+\sqrt{2}i)s}\right) =$

$e^{-2s}\cos(\sqrt{2}\,s)$

$u_3 = \mathrm{Im}\left(e^{(-2+i\sqrt{2})s}\right) =$

$e^{-2s}\sin(s\sqrt{2})$

dus

$u_h = Ae^s + Be^{-2s}\cos(s\sqrt{2}) +$

$Ce^{-2s}\sin(s\sqrt{2})$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ willekeurige const.

We zullen nu u_p proberen te raden.

Stel: $u_p = as^2 + bs + c$

wat zijn dan a, b, c zdd u_p een opl. is v.d. diff. verg?

$$\Rightarrow u_p' = 2as + b$$

$$u_p'' = 2a$$

$$u_p''' = 0.$$

$$\Rightarrow 0 + 3 \cdot 2a + 2 \cdot (2as + b) - 6 \cdot (as^2 + bs + c) = s^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6a + 4as + 2b - 6as^2 - 6bs - 6c = s^2 + 2$$

$$\Rightarrow -6as^2 + (4a - 6b)s + 6a + 2b - 6c = s^2 + 2$$

en dit moet gelden $\forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} -6a = 1 \\ 4a - 6b = 0 \\ 6a + 2b - 6c = 2 \end{array}\right\}.$$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow 4 \cdot -\frac{1}{6} - 6 \cdot b = 0$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} - 6b = 0.$

$\frac{2}{3} + 6b = 0.$

$6b = -\frac{2}{3}$

$b = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}.$

$6 \cdot -\frac{1}{6} + 2 \cdot -\frac{1}{9} - 6c = 2$

$-1 - \frac{2}{9} - 6c = 2$

$-6c = 2 + 1\frac{2}{9}$

$-6c = 3\frac{2}{9} = \frac{29}{9}$

$c = -\frac{29}{54}$

dus $u_p = -\frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{9}s - \frac{29}{54}$ voldoet aan de diff. verg.

de alg. gl is dan dus:

$u(s) = Ae^{s} + Be^{-2s}\cos(s\sqrt{2}) +$
$C e^{-2s}\sin(s\sqrt{2}) - \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{9}s - \frac{29}{54}$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ willekeurige const.

Opgave 5 9

evenwichtspunten krijgen we als.

$u' = 0$ & $w' = 0 \Rightarrow$

$u(1-2u-w) = 0$ & $w(3-3u-\frac{1}{2}w) = 0$

$u = 0$ of $1-2u-w = 0$ & $w = 0$ of $3-3u-\frac{1}{2}w = 0$

$(u = 0$ of $w = 1-2u)$ & $(w = 0$ of $w = 6-6u)$

dan de nulisoclinen zijn.

u: $u = 0$ en $w = 1-2u$ (lijnen).

w: $w = 0$ en $w = 6-6u$ (lijnen)

evenwichtspunten zijn snijpunten van een u-isocline met een w-isocline,

dan $A(0,0)$ is evenwichtpunt

punt B: $u = 0$ & $w = 6-6u$;

$u = 0$ & $w = 6$; $B(0,6)$

is evenwichtpunt.

punt C: $w = 0$ ~~en~~ & $w = 1-2u$

$0 = 1-2u$.

$u = \frac{1}{2}$

$C(\frac{1}{2}, 0)$ is evenwichtpunt.

vel 10/12

Vervolg opgave 5

punt D: $w = 1 - 2u$ & $w = 6 - 6u$.

$\Rightarrow$ $1 - 2u = 6 - 6u$.

$4u = 5$

$u = 1\frac{1}{4}$

$w = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{2} = -1\frac{1}{2}$

dus $D(1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2})$ is evenwichtspunt.

8

Nu gaan we de stabiliteit v.d. punten A t/m D bepalen.

de linearisatie van het stelsel wordt:

$$J(u, w) = \begin{pmatrix} 1 - 4u - w & -u \\ -3w & -w + 3 - 3u \end{pmatrix}.$$

8

punt A: (met T het spoor en D de determinant).

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$T = 4$, $D = 3$, $T^2 - 4D = 4^2 - 4 \cdot 3 > 0$

en $\frac{1}{4} T^2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4 > 3$, d.w.z. $D > \frac{1}{4} T^2$, en $T > 0$.

dus A is ~~spiraal~~ instabiel source.
en dus instabiel.

punt B:

$$J(0,5) = \begin{pmatrix} 1-5 & 0 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$$

$T = 4$, $D = -45$

$D < 0$, dus zadelpunt.
en dus instabiel.

Punt ~~[illegible]~~ C:

$$J\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$T = \frac{1}{2}$, $D = -1\frac{1}{2}$.

$D < 0$ dus een ~~[illegible]~~ zadelpunt.

$$J\left(1\tfrac{1}{4}, -1\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 - 4 \cdot 1\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{1}{2} & -1\tfrac{1}{4} \\ 3 \cdot 1\tfrac{1}{2} & -1\tfrac{1}{2} + 3 - 3 \cdot 1\tfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\tfrac{1}{2} & -1\tfrac{1}{4} \\ 4\tfrac{1}{2} & -\tfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

$$T = -\frac{5}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{10}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{19}{4}.$$

$$D = -\frac{5}{2} \cdot -\frac{9}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{2} =$$

$$\frac{45}{8} + \frac{45}{8} = \frac{90}{8} = 15$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot T^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(-\tfrac{19}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{64}\cdot 19^2$$

$$= \tfrac{361}{64} = 5\tfrac{41}{64}$$

dus $T < 0$ en $D > \frac{1}{4}T^2$

dus spiraal kink en dus stabiel.

We zullen nu de richting v.d. raakvectoren op de nulisoclinen bekijken:

$u = 0 \Rightarrow w' = w\cdot(3 - \tfrac{1}{2}w)$.

$u' = 0 \Rightarrow w' < 0$ als $w < 0$ of

$3 - \tfrac{1}{2}w < 0 \Rightarrow$

$\tfrac{1}{2}w > 3$

$w > 6$.

dus $w' > 0 \Rightarrow 0 < w < 6$.

$w' < 0 \Rightarrow w < 0$ of $w > 6$.

$w = 1 - 2u. \Rightarrow u' = 0$ &

$w' = w(3 - 3u - \tfrac{1}{2}w) =$

$(1-2u)(3-3u - \tfrac{1}{2}(1-2u)) =$

$(1-2u)(2\tfrac{1}{2} - 2u) =$

$4u^2 - 6\tfrac{1}{2}u + 2\tfrac{1}{2}$

wanneer is $w' > 0$?

verooly opgave 5.

C. Douma
51756775
vel 11/12

$4u^2 - 6\frac{1}{2}u + 2\frac{1}{2} = 0$

$8u^2 - 13u + 5 = 0.$

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 =$

$169 - 200 < 0.$

En dit is een ~~ingesloten~~ dalparabool dus.

$w' > 0 \quad \forall u, w \in \mathbb{R}.$

$w = 0 \Rightarrow w' = 0$ &

$u' = u(1 - 2u)$

$u' < 0$ als $u < 0$ of $1 - 2u < 0$

$u > \frac{1}{2}.$

$u' < 0$ als $u < 0$ of $u > \frac{1}{2}$

$u' > 0$ als $0 < u < \frac{1}{2}$

$w = 6 - 6u \Rightarrow w' = 0$ &

$u' = u(1 - 2u - (6 - 6u)) =$

$u(1 - 2u - 6 + 6u) =$

$u(4u - 5)$

$u' = 4u^2 - 5u.$

202.

wanneer is $u' < 0$?

$u' = 0$ als $4u^2 - 5u = 0$.

$u = 0$ of $4u - 5 = 0$

$4u = 5$

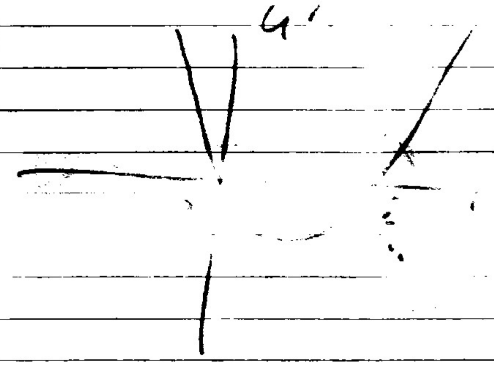
$u = \frac{5}{4}$

$4u^2 - 5u$ is een dal parabool.

en als $u = 1 \Rightarrow$

$u' = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 = -1$.

$\Rightarrow$

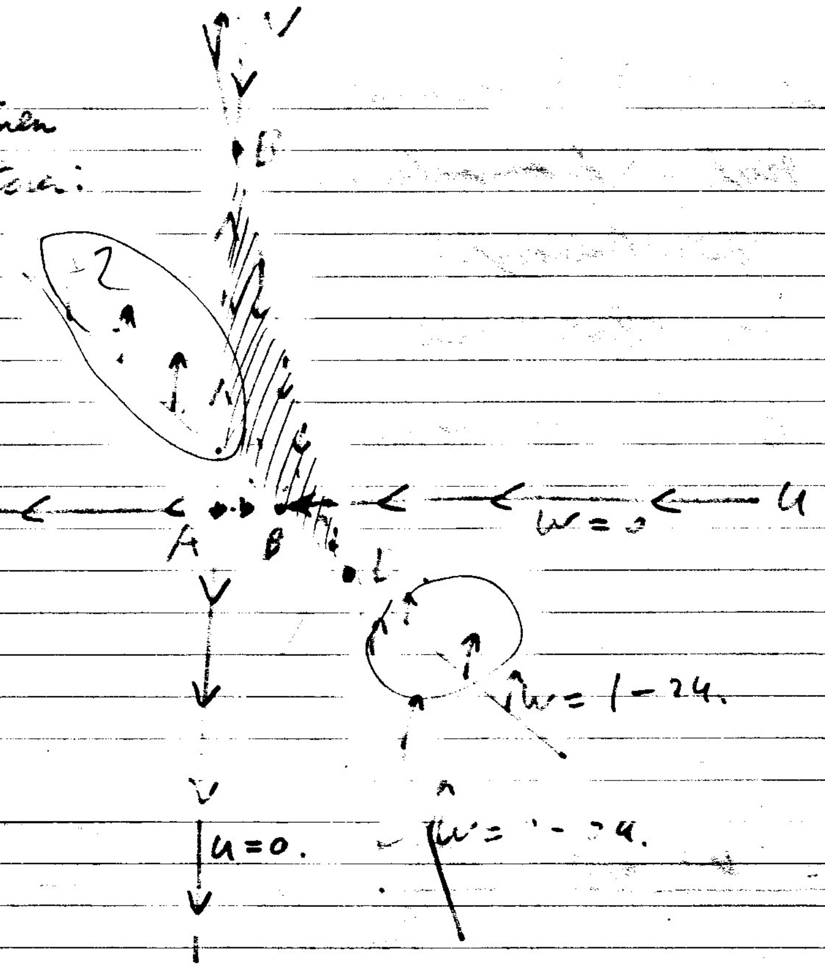


dus $u' < 0$ als $0 < u < \frac{5}{4}$.

$u' \geq 0$ als $u < 0$ of $u > \frac{5}{4}$.

met deze informatie v.d. nulomvelin[illegible] kunnen we een faseplaatje tekenen:

Faseplaatje
met nulclinen
en raakvectoren:

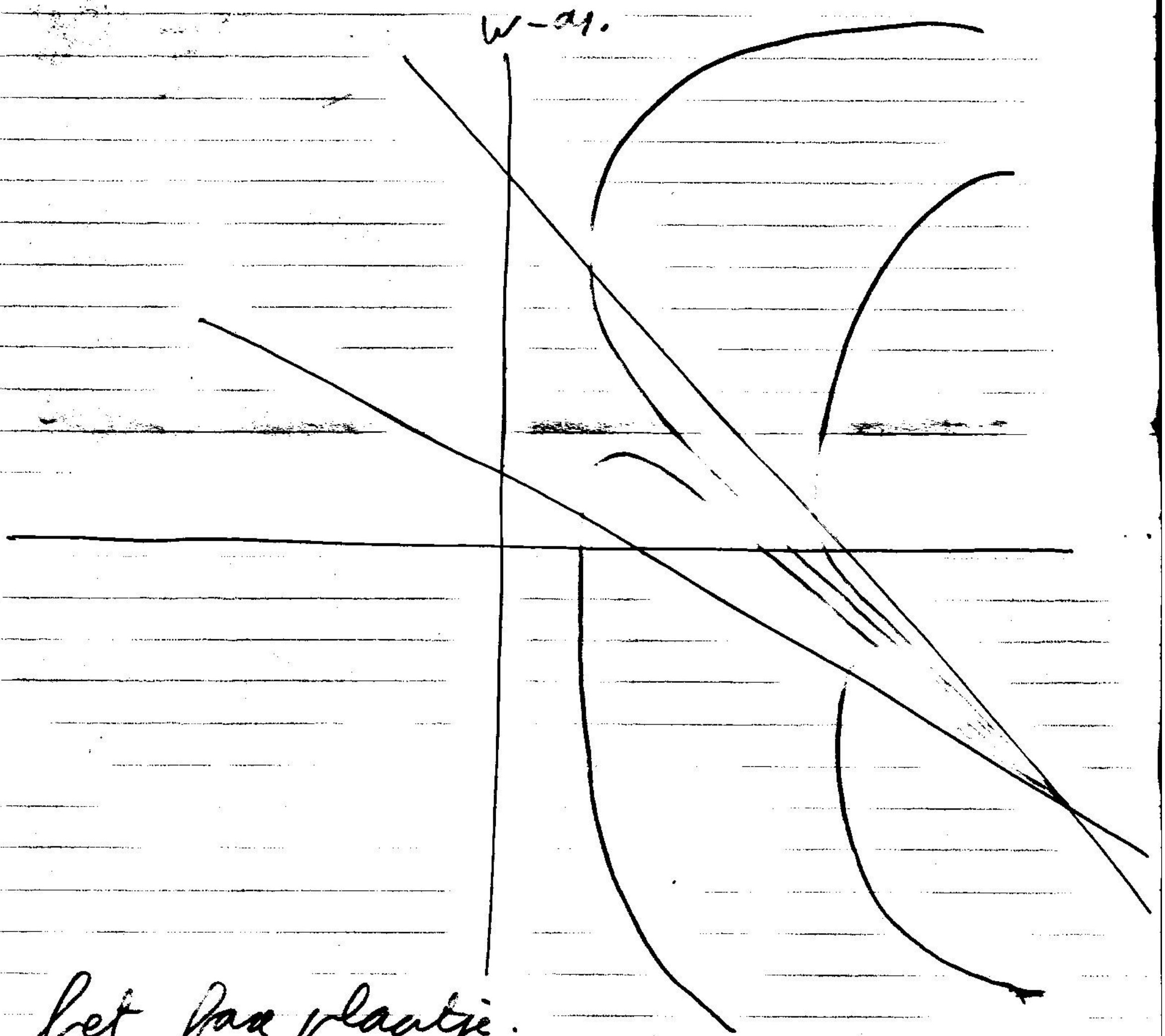


aangezien de w-as invariant is en
alle vectoren naar binnen het rode deel
wijzen, is het rode deel invariant.
dit plaatje, samen met de gegeven dat:

A een spiral source, is
B een zadelpunt,
D een ~~[illegible]~~ nodal sink,
C een zadelpunt is, stelt ons in
staat om gl.
te schetsen: 2.c.2.

vel 12/12

Vervolg opgave 5



het faseplaatje.
u-nullclines ($u'=0$) zijn zwart.
w-null-clines ($w'=0$) zijn rood
opl.-krommen zijn blauw.